« LA CITÉ AUX ÉNIGMES »

SOLUTIONS

« LA CITÉ AUX ÉNIGMES » : Fiche-réponses

N°	Réponse à l'énigme	Information à conserver, concernant la réponse trouvée	Lettre correspondante dans l'alphabet, sachant que le code est le suivant : 1 = A ; 2 = B etc…
1	87,5 %	Le chiffre des dizaines est 8	H
2	Léonard	La 1ère lettre est L	L
3	5/3	Le numérateur est 5	E
4	$\pi/4 - 1/2$	Multiplier la réponse obtenue par 25 et en prendre la partie entière : 7	G
5	9 chiffres	Ajouter la réponse obtenue avec celle de l'énigme n°10 : 20	T
6	10 sacs	Calculer la différence du double de la réponse et de 2 : 18	R
7	0	Prendre la lettre qui a la même forme que la réponse obtenue.	O
8	-1 ; 1 ; -3 ; 3 ; -5 ; 5	Parmi les solutions, prendre le nombre positif qui n'est pas premier : 1	A
9	1 / 2019	Prendre le chiffre des unités du dénominateur : 9	I
10	11	Prendre le nombre premier qui suit la réponse obtenue : 13	M

➔ En reprenant les lettres dans l'ordre suivant : questions n° 2 – 7 – 4 – 8 – 6 – 9 – 5 – 1 – 10 – 3 ,

trouvez le mot mystère : L O G A R I T H M E

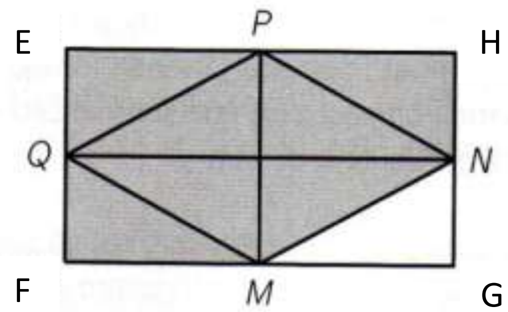
➔ En prenant l'anagramme du mot mystère, vous découvrirez le mot-clé qui régit notre société :

A L G O R I T H M E

Voici une partie de l'univers des Mathématiques, ancrée dans notre société !

CORRECTION de « LA CITE aux ENIGMES », octobre 2020

1. En introduisant les milieux des deux autres côtés du rectangle, on constate que le rectangle est formé de huit triangles rectangles superposables et que l'aire coloriée est formée de sept de ces huit triangles.



Indépendamment des valeurs de CN et MC données par l'énoncé, le pourcentage cherché est donc $\frac{7}{8} = 87,5\,\%$.

2. Emilien et Arthur affirmant des choses exactement contradictoires, l'un des deux ment et l'autre dit la vérité. Puisqu'un seul des quatre footballeurs dit la vérité, on peut déjà être sûr que Léonard et Julian mentent. Puisque Léonard ment, il est l'auteur du but.

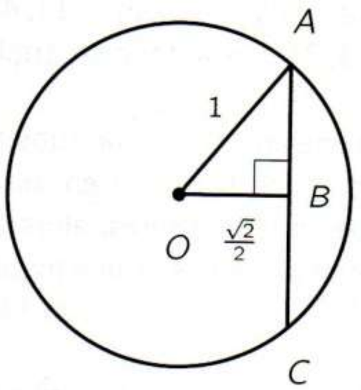
3. Notons x le nombre de bananes. On a alors $6 + x$ oranges et $6 + x + x = 6 + 2x$ fruits au total. On obtient donc $x = 9$ bananes. et 15 oranges. Par conséquent, le rapport entre les oranges et les bananes est de $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

4. Soit O le centre du cercle, A et C les extrémités de la corde[17]. Soit B le point de la corde $[AC]$ le plus proche de O, donc tel que $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm. L'angle $\widehat{ABO}$ mesure donc 90°, et puisque le triangle AOC est isocèle, B est le milieu du segment $[AC]$. D'après le théorème de Pythagore[18],

$$AB = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}.$$

Ainsi, $AC = \sqrt{2}$ cm et l'aire[19] du triangle AOC est égale à :

$$\frac{1}{2}AC \times OB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\,\text{cm}^2.$$



De plus, le triangle AOB est isocèle et rectangle, on a donc $\widehat{AOB} = 45°$, et par symétrie l'angle $\widehat{COB} = 45°$, ce qui implique que $\widehat{AOC} = 90°$. Ainsi, le secteur AOC représente un quart de cercle, et son aire est alors égale à $\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}\,\text{cm}^2$. L'aire recherchée est donc $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\,\text{cm}^2$.

5. Remarquons que le nombre étudié se réécrit

$$2^3 \times 5^4 \times 10^5 = 5 \times (2 \times 5)^3 \times 10^5 = 5 \times 10^8.$$

Il possède donc neuf chiffres.

6. Comme 5 et 100 sont des multiples de 5, il faut que le nombre de sacs de sept biscuits soit un multiple de 5. Si le vendeur donne cinq sacs de sept biscuits, il fournira 13 sacs de cinq biscuits : ce qui fait 18 sacs en tout. Si le vendeur donne dix sacs de sept biscuits, il fournira six sacs de cinq biscuits : ce qui fait 16 sacs en tout.

Julien recevra six sacs de cinq biscuits et dix de sept biscuits.

7. Calculons les premiers termes de cette suite pour voir si un schéma se répète. On sait que $a_0 = a_1 = 1$, ensuite on a :

$$\begin{aligned} a_2 &= 1(a_0 + a_1) = 1(1+1) = 2 \\ a_3 &= 2(a_1 + a_2) = 2(1+2) = 6 \\ a_4 &= 3(2+6) = 24 \\ a_5 &= 4(6+24) = 120 \\ a_6 &= 5(24+120) = 720. \end{aligned}$$

Remarquons alors que a_5 et a_6 terminent par zéro, ce qui implique que la somme $a_{n-1} + a_n$, pour $n \geq 6$, va forcément terminer aussi par un zéro. Ainsi, le chiffre des unités pour $n \geq 6$ sera égal à 0.

8. On a $k = \dfrac{9n^2+31}{n^2+7} = \dfrac{9(n^2+7)-32}{n^2+7} = 9 - \dfrac{32}{n^2+7}$.

Puisque k est un entier, on déduit que n^2+7 est un diviseur de 32 et comme $n^2+7 \geq 7$, on peut conclure que n^2+7 vaut 8, 16 ou 32. Par conséquent n^2 peut valoir 1, 9 ou 25. Ainsi, $n \in \{-1, 1, -3, 3, -5, 5\}$.

9. Calculons les premiers termes de la suite : $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 0$, $t_4 = \frac{1}{3}$, $t_5 = 0$ et $t_6 = \frac{1}{5}$.
Si n est impair nous pouvons l'écrire sous la forme $n = 2k+1$ avec k un nombre entier tel que $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} t_{2k+1} &= \left(\frac{2k-2}{2k}\right) t_{2k-1} \\ &= \left(\frac{2k-2}{2k}\right)\left(\frac{2k-4}{2k-2}\right) t_{2k-3} \\ &= \left(\frac{2k-2}{2k}\right)\left(\frac{2k-4}{2k-2}\right)\cdots\left(\frac{2}{4}\right) t_3 = 0. \end{aligned}$$

Nous voyons que si $n > 1$ est impair alors $t_n = 0$.
Maintenant voyons le cas n pair. Nous pouvons alors l'écrire sous la forme $n = 2k$ avec k un nombre entier tel que $k > 1$ et nous avons :

$$\begin{aligned} t_{2k} &= \left(\frac{2k-3}{2k-1}\right) t_{2k-2} \\ &= \left(\frac{2k-3}{2k-1}\right)\left(\frac{2k-5}{2k-3}\right) t_{2k-4} \\ &= \left(\frac{2k-3}{2k-1}\right)\left(\frac{2k-5}{2k-3}\right)\left(\frac{2k-7}{2k-5}\right)\cdots\left(\frac{1}{3}\right) t_2 \\ &= \frac{1}{2k-1}. \end{aligned}$$

Si n est pair nous obtenons donc $t_n = \frac{1}{n-1}$. Ainsi, $t_{2020} = \frac{1}{2019}$.

10. Notons $x_1, x_2, \ldots, x_6, x_7$ les sept nombres. Nous avons tout d'abord : $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} = 4$, d'où $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 24$. Nous pouvons alors faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + x_7}{7} &= 5 \\ \frac{24 + x_7}{7} &= 5 \\ 24 + x_7 &= 35 \\ x_7 &= 11. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre rajouté est 11.